

一阶逻辑的归结

在命题逻辑中,每个逻辑公式都可以等价于一个析取或合取范式。

斯科伦(Skolem)定理: 在一阶逻辑中,给定任意一个逻辑公式 A , 都存在一个子句标准形式 A' 与 A 是等可满足性的, 即: $A \approx A'$.

将一阶逻辑公式转化为子句标准形的方法是:

1. 将一阶逻辑公式转化为前束范式。

- 2A. 如果存在量词不出现在全称量词的辖域内, 用一个个体常量替换该存在量词约束的变量。

2B.如果存在量词出现在全称量词的辖域内, 用一个斯科伦函数替换该存在量词约束的变量。

对于 $\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_k \exists y B(x_1, x_2, \cdots, x_k, y)$, 存在量词 y 的斯科伦函数通常表示成:

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_k).$$

3.转化为斯科伦标准形:

$$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_k C$$

4.略去所有全称量词。

5.消去合取词, 将母式转化为子句标准形。

例: 求 $\forall x (p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow (\forall x p(x) \rightarrow \forall x q(x))$ 的子句标准形。

$$\begin{aligned}
 \text{解: } & \forall x (p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow (\forall x p(x) \rightarrow \forall x q(x)) \\
 & \forall x (p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow (\forall y p(y) \rightarrow \forall z q(z)) \\
 & \neg \forall x (\neg p(x) \vee q(x)) \vee \neg \forall y p(y) \vee \forall z q(z) \\
 & \exists x (p(x) \wedge \neg q(x)) \vee \exists y \neg p(y) \vee \forall z q(z) \\
 & \exists x \exists y \forall z (p(x) \vee \neg p(y) \vee q(z)) \wedge (\neg q(x) \vee \neg p(y) \vee q(z)) \\
 & \forall z \left(\boxed{p(a)} \vee \neg \boxed{p(b)} \vee q(z) \right) \wedge \left(\boxed{\neg q(a)} \vee \boxed{\neg p(b)} \vee q(z) \right)
 \end{aligned}$$

于是, 可以得到子句标准形:

$$\{\{p(a), \neg p(b), q(z)\}, \{\neg q(a), \neg p(b), q(z)\}\}.$$

例: 求 $\exists x \forall y p(x, y) \rightarrow \forall y \exists x p(x, y)$ 的子句标准形。

解:

$$\exists x \forall y p(x, y) \rightarrow \forall y \exists x p(x, y)$$

$$\exists x \forall y p(x, y) \rightarrow \forall w \exists z p(z, w)$$

$$\neg \exists x \forall y p(x, y) \vee \forall w \exists z p(z, w)$$

$$\forall x \exists y \neg p(x, y) \vee \forall w \exists z p(z, w)$$

$$\forall x \exists y \forall w \exists z (\neg p(x, y) \vee p(z, w))$$

$$\forall x \forall w \left(\neg p \left(x, \boxed{f(x)} \right) \vee p \left(\boxed{g(x, w)}, w \right) \right)$$

于是, 可以得到子句标准形:

$$\{\{\neg p(x, f(x)), p(g(x, w), w)\}\}.$$

将命题逻辑中的归结方法直接应用到一阶逻辑中, 称为触底归结(Ground Resolution).

$$Res(C_1, C_2) = (C_1 - \{x\}) \vee (C_2 - \{\bar{x}\}).$$

对于命题逻辑, 输入:

$$\{pq, \bar{q}r\},$$

输出:

$$\{pr\}.$$

对于一阶逻辑, 输入:

$$\{\boxed{q(f(b))}, r(a, f(b))\}, \{p(a), \neg \boxed{q(f(b))}, s(f(a), b)\},$$

输出:

$$\{p(a), r(a, f(b)), s(f(a), b)\}.$$

除了触底归结, 在一阶逻辑中还需要借助**替换**(Substitution)操作实现归结。

设:

$$E = \{p(x), q(f(y))\},$$

θ 是一个替换:

$$\theta = \{x \leftarrow y, y \leftarrow f(a)\},$$

则替换操作 $E\theta$ 可通过同时替换所有相关变量得到:

$$E\theta = \{p(y), q(f(f(a)))\}$$

同时替换是必要的, 否则会得到以下错误的替换结果:

$$E\theta = \{p(y), q(f(y))\}$$

$$E\theta = \{p(f(a)), q(f(f(a)))\}$$

多个替换可以组合。

若：

$$\begin{aligned}E &= \{u, v, x, y, z\} \\ \theta &= \{x \leftarrow f(y), y \leftarrow f(a), z \leftarrow u\} \\ \sigma &= \{y \leftarrow g(a), u \leftarrow z, v \leftarrow f(f(a))\}\end{aligned}$$

则：

$$\begin{aligned}\theta\sigma &= \{x \leftarrow f(g(a)), y \leftarrow f(a), u \leftarrow z, v \leftarrow f(f(a))\} \\ E(\theta\sigma) &= p(z, f(f(a)), f(g(a)), f(a), z) \\ E\theta &= p(u, v, f(y), f(a), z) \\ (E\theta)\sigma &= p(z, f(f(a)), f(g(a)), f(a), z)\end{aligned}$$

因此：

$$E(\theta\sigma) = (E\theta)\sigma$$

尽管两个文字: $p(f(x), g(y))$ 和 $\neg p(f(f(a)), g(z))$ 不具备触底归结的条件, 但是通过替换:

$$\theta_1 = \{x \leftarrow f(a), y \leftarrow f(g(a)), z \leftarrow f(g(a))\}$$

将原文字转换为:

$$\begin{aligned} & p(f(f(a)), g(f(g(a)))) \\ & \neg p(f(f(a)), g(f(g(a)))) . \end{aligned}$$

从而可以实现归结。

这个操作称为合一(Unification).

在合一操作中, 替换并不唯一。

例如:

$$\theta_2 = \{x \leftarrow f(a), y \leftarrow a, z \leftarrow a\}$$

的替换结果是:

$$p(f(f(a)), g(a)), \neg p(f(f(a)), g(a))$$

或者

$$\theta_3 = \{x \leftarrow f(a), z \leftarrow y\}$$

替换结果是:

$$p(f(f(a)), g(y)), \neg p(f(f(a)), g(y)).$$

其中, θ_3 称为公式 E 的最广合一子 (Most General Unifier, MGU).
其它替换建立在最广合一子基础之上, 如:

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \theta_3 \lambda_1, & \lambda_1 &= \{y \leftarrow a\} \\ \theta_1 &= \theta_3 \lambda_2, & \lambda_2 &= \{y \leftarrow f(g(a))\}\end{aligned}$$

例: 已知子句标准形为

$$\{p(f(x), g(y)), q(x, y)\}, \{\neg p(f(f(a)), g(z)), q(f(a), z)\}$$

针对 $L_1 = p(f(x), g(y))$ 和 $L_2^c = p(f(f(a)), g(z))$ 两个文字,
可通过最广合一子:

$$\{x \leftarrow f(a), y \leftarrow z\}$$

将子句标准形归结为:

$$\{q(f(a), z), q(f(a), z)\}$$

或

$$\{q(f(a), z)\}.$$