一阶逻辑推导

$$\neg(\forall x(r(x) \vee s(x)) \rightarrow (\forall x r(x) \vee \forall x s(x)))$$
$$\downarrow$$
$$\forall x(r(x) \vee s(x)), \neg(\forall x r(x) \vee \forall x s(x))$$
$$\downarrow$$
$$\forall x(r(x) \vee s(x)), \neg\forall x r(x), \neg\forall x s(x)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x(r(x) \vee s(x)), \neg\forall x r(x), \neg s(a)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x(r(x) \vee s(x)), \neg r(a), \neg s(a)$$
$$\downarrow$$
$$r(a) \vee s(a), \neg r(a), \neg s(a)$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$
$$r(a), \neg r(a), \neg s(a) \qquad\qquad s(a), \neg r(a), \neg s(a)$$
$$\times \qquad\qquad\qquad \times$$

似对非对的语义树

$$
\begin{array}{c}
\neg(\forall x\ (r(x) \vee s(x)) \rightarrow (\forall x\, r(x) \vee \forall x\, s(x))) \\
\downarrow \\
\forall x\ (r(x) \vee s(x)), \quad \neg(\forall x\, r(x) \vee \forall x\, s(x)) \\
\downarrow \\
\forall x\ (r(x) \vee s(x)), \quad \neg\forall x\, r(x), \quad \neg\forall x\, s(x) \\
\downarrow \\
\forall x\ (r(x) \vee s(x)), \quad \exists x\, \neg r(x), \quad \exists x\, \neg s(x) \\
\downarrow \\
\forall x\ (r(x) \vee s(x)), \quad \exists x\, \neg r(x), \quad \neg s(a) \\
\downarrow \\
\forall x\ (r(x) \vee s(x)), \quad \neg r(a), \quad \neg s(a) \\
\downarrow \\
(r(a) \vee s(a)), \quad \neg r(a), \quad \neg s(a) \\
\swarrow \qquad\qquad \searrow \\
\underline{r(a)}, \underline{\neg r(a)}, \neg s(a) \qquad\qquad \underline{s(a)}, \neg r(a), \underline{\neg s(a)} \\
\times \qquad\qquad\qquad\qquad \times
\end{array}
$$

错误的语义树

$$\forall x\ (r(x) \vee s(x)),\quad \exists x \neg r(x),\quad \neg s(a_1)$$

$$\downarrow$$

$$\forall x\ (r(x) \vee s(x)),\quad \neg r(a_2),\quad \neg s(a_1)$$

$$\downarrow$$

$$\forall x\ (r(x) \vee s(x)),\quad r(a_1) \vee s(a_1),\quad \neg r(a_2),\quad \neg s(a_1)$$

$$\downarrow$$

$$\forall x\ (r(x) \vee s(x)), r(a_2) \vee s(a_2), r(a_1) \vee s(a_1), \neg r(a_2), \neg s(a_1)$$

$$\downarrow$$

语义树并不能判定所有一阶逻辑公式的可满足性，但可以证明一个不可满足式的不可满足性。

如果一个逻辑公式是永真的，那么可以通过建立该公式的否的语义树来证明。

$$
\begin{array}{ccc}
\underline{\neg\forall x r(x), \neg r(a)}, r(a), s(a) & & \underline{\neg\forall x s(x), \neg s(a)}, r(a), s(a) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\neg\forall x r(x), \underline{r(a), s(a)} & & \neg\forall x s(x), \underline{r(a), s(a)} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\neg\forall x r(x), \underline{r(a) \vee s(a)} & & \neg\forall x s(x), \underline{r(a) \vee s(a)} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\underline{\neg\forall x r(x)}, \forall x(r(x) \vee s(x)) & & \underline{\neg\forall x s(x)}, \forall x(r(x) \vee s(x)) \\
\searrow & & \swarrow \\
 & \underline{\neg\,(\forall x r(x) \vee \forall x s(x)), \forall x(r(x) \vee s(x))} & \\
 & \downarrow & \\
 & (\forall x r(x) \vee \forall x s(x)) \rightarrow \forall x(r(x) \vee s(x)) &
\end{array}
$$

一阶逻辑的金琛系统

一阶逻辑的希尔伯特系统:

公理 1: $\vdash (A \to (B \to A))$

公理 2: $\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

公理 3: $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

公理 4: $\vdash \forall x A(x) \to A(a)$

公理 5: $\vdash \forall x(A \to B(x)) \to (A \to \forall x B(x))$.

假言推理(Modus Ponens): $\frac{\vdash A \to B \quad \vdash A}{\vdash B}$

泛化: $\frac{\vdash A(a)}{\vdash \forall x A(x)}$.

对谓词公式$A(x)$来说,在量词$\forall y$或$\exists y$的辖域内,如果没有x的自由变量,则称$A(x)$对于变量y是**自由的**。

例: 令$A(x)$表示下列谓词公式:

(1) $A(x) = \forall y P(y) \vee Q(x,y)$

(2) $A(x) = \forall y P(y) \rightarrow (Q(x) \wedge Q(y))$

(3) $A(x) = \forall y P(\boxed{x}, y) \rightarrow Q(x,y)$

(4) $A(x) = \forall y (P(y) \vee Q(\boxed{x}, y))$

(5) $A(x) = \forall y (P(y) \vee \forall x Q(x,y))$

其中(1),(2)和(5)对y是自由的,(3)和(4)对y不是自由的。

公理4也可以转化为规则，称存在量词具体化规则(Universal Specification)，简称US规则。

$$\frac{\forall x A(x)}{\therefore A(y)} \quad or \quad \frac{\forall x A(x)}{\therefore A(c)}$$

其中c为个体域中任意个体常量。

这里要求$A(x)$对y是自由的，y或c是取代了$A(x)$中所有自由出现的x.

例: 设个体域为实数集合,$L(x,y)$表示$x<y$,则$\exists x \exists y L(x,y)$解释为“对任一实数$x$,都存在实数$y$,使得$x<y$”,这是一个真命题。

推导过程如下:

1. $\vdash \forall x \exists y L(x,y)$ Assumption

2. $\vdash \exists y L(y,y)$ US,1

出错的原因是$\exists y L(x,y)$对y不是自由的。

全称量词泛化规则(Universal Generalization)又称全称量词引入规则，简称UG规则。

$$\frac{A(x)}{\therefore \forall y A(y)}$$

全称量词泛化规则要求：前提$A(x)$对于x的任意取值都成立，$A(x)$对y是自由的，且取代x的个体变量y不能在$A(x)$中约束出现。

例: 设个体域为实数集合, $L(x, y)$表示$x < y$, 推导过程如下:

1. $\vdash \forall x \exists y L(x, y)$	Assumption
2. $\vdash \exists y L(z, y)$	US,1
3. $\vdash \forall y \exists y L(y, y)$	UG,2

出错的原因是用在$\exists y L(z, y)$中约束出现的y取代了z.

其它规则

存在量词具体化规则(Existential Specification), 简称ES规则, 也称C-Rule.

$$\frac{\exists x A(x)}{\therefore A(y)} \quad or \quad \frac{\exists x A(x)}{\therefore A(c)}$$

其中c为特定的个体常量,且使用不曾在$A(x)$中出现过的个体常量c或个体变量y取代x.

当$A(x)$中存在其他自由变量时不宜使用此规则。

例: 设个体域为实数集合,$L(x,y)$表示$x<y$,推导过程如下:

1. $\vdash\ \forall x\exists y L(x,y)$ Assumption

2. $\vdash\ \exists y L(z,y)$ US,1

3. $\vdash\ L(z,c)$ ES,2

出错原因是$\exists y L(z,y)$中存在自由变量z,不宜使用ES规则。

存在量词泛化规则，简称EG (Existential Generalization)规则。

$$\frac{A(c)}{\therefore \exists y A(y)} \quad or \quad \frac{A(x)}{\therefore \exists y A(y)}$$

其中c为特定的个体常量，$A(x)$对y是自由的，取代c的个体变量y不曾在$A(x)$中出现，且y不能是$A(x)$中的个体变量。

例: 设个体域为实数集合,$L(x,y)$表示$x<y$,推导过程如下:

1. $\vdash\ \exists x L(x,0)$ Assumption

2. $\vdash\ \exists x \exists x L(x,x)$ EG,1

出错原因是x已在$\exists x L(x,0)$中出现, 此时不能用x取代0.

定理: $\forall x(A(x) \to B(x)) \to (\forall xA(x) \to \forall xB(x))$.

证明:

1.$\forall x(A(x) \to B(x)), \forall xA(x) \vdash \forall xA(x)$	Assumption
2.$\forall x(A(x) \to B(x)), \forall xA(x) \vdash A(a)$	A4,1
3.$\forall x(A(x) \to B(x)), \forall xA(x) \vdash \forall x(A(x) \to B(x))$	Assumption
4.$\forall x(A(x) \to B(x)), \forall xA(x) \vdash A(a) \to B(a)$	A4,3
5.$\forall x(A(x) \to B(x)), \forall xA(x) \vdash B(a)$	MP,2,4
6.$\forall x(A(x) \to B(x)), \forall xA(x) \vdash \forall xB(x)$	UG,5
7.$\forall x(A(x) \to B(x)) \vdash \forall xA(x) \to \forall xB(x)$	Deduction,1,6
8.$\vdash \forall x(A(x) \to B(x)) \to (\forall xA(x) \to \forall xB(x))$	Deduction,3,7