前束范式

一个谓词公式,如果它的所有量词均出现在公式的最前端,而它们的作用域延伸到整个谓词公式的尾端,则称该谓词公式为**前束范式**。

前束范式具有以下的形式:

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_k x_k B$$

其中,每个$Q_i \in \{\forall, \exists\}(1 \leq i \leq k)$,$B$为不含量词的谓词公式。

如果谓词公式中无量词,那么它也是前束范式。例如:

$$\neg A(x) \vee B(x).$$

例:

$$\forall x \exists y \exists z(\neg P(x) \rightarrow (Q(y) \rightarrow R(z, y)))$$
$$\forall x \forall y(S(x, w) \vee T(y))$$
$$U(x, y)$$

是前束范式。

而:

$$\forall x F(x, y) \rightarrow \exists y G(y)$$
$$\forall x \exists z C(x, z) \wedge V(z)$$

都不是前束范式。

前束范式存在定理:任何谓词公式均存在其等价的前束范式。

化谓词公式为前束范式方法是:

1.将公式中的联结词全部转化为¬,∧和∨.

2. 将否定联结词向谓词公式内深入,使之直接位于原子谓词公式之前。

3.利用换名规则和代入规则使所有约束变元符号均不相同,自由变元与约束变元的符号也不相同。

4.利用等价式将量词逐个移至谓词公式的前端。

例: 将一阶逻辑公式 $\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$转化为前束范式。

解:

$$\begin{aligned}
&\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \\
&\Leftrightarrow \forall x P(x) \rightarrow \exists y Q(y) \\
&\Leftrightarrow \neg \forall x P(x) \vee \exists y Q(y) \\
&\Leftrightarrow \exists x(\neg P(x)) \vee \exists y Q(y) \\
&\Leftrightarrow \exists x(\neg P(x) \vee \exists y Q(y)) \\
&\Leftrightarrow \exists x \exists y(\neg P(x) \vee Q(y)) \\
&\Leftrightarrow \exists x \exists y(P(x) \rightarrow Q(y))
\end{aligned}$$

也可以这样转化:

$$\begin{aligned}
&\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \\
&\Leftrightarrow \neg \forall x P(x) \vee \exists x Q(x) \\
&\Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x) \\
&\Leftrightarrow \exists x(\neg P(x) \vee Q(x))
\end{aligned}$$

一阶逻辑公式的前束范式并不唯一。

例: 将一阶逻辑公式

$$\neg(\forall x P(x,y) \land \forall x Q(x,z)) \to \exists y R(y,x)$$

转化为前束范式:

$$\neg(\forall x P(x,y) \land \forall x Q(x,z)) \to \exists y R(y,x)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x P(x,y) \land \forall x Q(x,z)) \lor \exists y R(y,x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x((P(x,y) \land Q(x,z)) \lor \exists y R(y,x)$$

$$\Leftrightarrow \forall u((P(u,y) \land Q(u,z)) \lor \exists v R(v,x)$$

$$\Leftrightarrow \forall u \exists v(((P(u,y) \land Q(u,z) \lor R(v,x))$$

一个前束范式,若其不含量词的部分为析取范式, 称为**前束析取范式**; 若其不含量词的部分为合取范式, 称为**前束合取范式**。

例: $\forall x \exists y (P(x,y) \wedge Q(x))$是前束合取范式。

$\forall x \exists y \exists z ((R(x,y,z) \wedge S(x)) \vee Q(x))$是前束析取范式。

定理: 任何谓词公式均可化为与其等价的前束析取范式或前束合取范式。

将一阶逻辑公式转化为前束析取范式或前束合取范式的方法是:

1.将公式中的联结词全部转化为¬,∧和∨.

2.将公式化为前束范式。

3.利用分配律将公式进一步转化为前束析取范式或前束合取范式。

例: 求$\forall x(F(x) \vee H(y)) \rightarrow \forall y G(x,y)$的前束合取范式。

解:

$$\begin{aligned}
&\forall x(F(x) \vee H(y)) \rightarrow \forall y G(x,y) \\
&\Leftrightarrow \neg \forall x(F(x) \vee H(y)) \vee \forall y G(x,y) \\
&\Leftrightarrow \exists x \neg (F(x) \vee H(y)) \vee \forall y G(x,y) \\
&\Leftrightarrow \exists v \neg (F(v) \vee H(y)) \vee \forall w G(x,w) \\
&\Leftrightarrow \exists v (\neg (F(v) \vee H(y)) \vee \forall w G(x,w)) \\
&\Leftrightarrow \exists v \forall w (\neg (F(v) \vee H(y)) \vee G(x,w)) \\
&\Leftrightarrow \exists v \forall w ((\neg F(v) \wedge \neg H(y)) \vee G(x,w)) \\
&\Leftrightarrow \exists v \forall w (\neg F(v) \vee G(x,w)) \wedge (\neg H(y) \vee G(x,w))
\end{aligned}$$

例: 求$\forall x\exists y(P(x,y)\land Q(x))\land\forall x(\exists zR(z,x)\to S(w))$的前束析取范式。

解: $\forall x\exists y(P(x,y)\land Q(x))\land\forall x(\exists zR(z,x)\to S(w))$

$\Leftrightarrow \forall x\exists y(P(x,y)\land Q(x))\land\forall x(\neg\exists zR(z,x)\lor S(w))$

$\Leftrightarrow \forall x\exists y(P(x,y)\land Q(x))\land\forall x(\forall z\neg R(z,x)\lor S(w))$

$\Leftrightarrow \forall x(\exists y(P(x,y)\land Q(x))\land\forall z(\neg R(z,x)\lor S(w)))$

$\Leftrightarrow \forall x\exists y((P(x,y)\land Q(x))\land\forall z(\neg R(z,x)\lor S(w)))$

$\Leftrightarrow \forall x\exists y\forall z((P(x,y)\land Q(x))\land(\neg R(z,x)\lor S(w)))$

$\Leftrightarrow \forall x\exists y\forall z((P(x,y)\land Q(x)\land\neg R(z,x))$

$\lor (P(x,y)\land Q(x)\land S(w)))$

例: 求$\forall x(\exists y(A(x,y)\wedge B(x))\rightarrow\exists zC(y,z))$的前束合取范式和前束析取范式。

解:

$$\forall x(\exists y(A(x,y)\wedge B(x))\rightarrow\exists zC(y,z))$$
$$\Leftrightarrow\forall x(\neg\exists y(A(x,y)\wedge B(x))\vee\exists zC(y,z))$$
$$\Leftrightarrow\forall x(\forall y(\neg A(x,y)\vee\neg B(x))\vee\exists zC(y,z))$$
$$\Leftrightarrow\forall x(\forall\boxed{w}(\neg A(x,\boxed{w})\vee\neg B(x))\vee\exists zC(y,z))$$
$$\Leftrightarrow\forall x\forall w\exists z(\neg A(x,w)\vee\neg B(x)\vee C(y,z))$$