一阶等价式与蕴含式

设A和B是一阶逻辑公式,若$A \leftrightarrow B$为永真式,则称A和B是**等价**的,记为$A \Leftrightarrow B$.

$A \Leftrightarrow B$表明在任意的解释和赋值下,A与B都具有相同的值。

例如:

$$\forall x \neg\neg P(x) \Leftrightarrow \forall x P(x)$$
$$\forall x \forall y A(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x,y)$$
$$\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$
$$\exists x (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$$

设A和B是谓词公式,若$A \to B$为永真式,则称A**永真蕴含**B,记为$A \Rightarrow B$.

$A \Rightarrow B$表明在任意的解释下,一切使A为真的赋值均使B为真。

例如:

$$\forall x P(x) \Rightarrow \exists x P(x)$$
$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$$
$$\forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\neg \exists x A(x) \Rightarrow \forall x \neg A(x)$$

置换规则

设A为含有子公式A_1的公式,用公式B_1置换公式A中的A_1得到公式B. 若$A_1 \Leftrightarrow B_1$,则$A \Leftrightarrow B$.

例如:

$$\forall x \neg\neg P(x) \Leftrightarrow \forall x P(x)$$
$$\forall x(\neg P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$$
$$\forall x \forall y(P(x) \to Q(y)) \Leftrightarrow \forall x \forall y(\neg Q(y) \to \neg P(x))$$

换名规则

设x是辖域内的约束变量,y是在辖域内未曾出现的变量,则有:

$$\forall x A(x) \Leftrightarrow \forall y A(y),$$
$$\exists x A(x) \Leftrightarrow \exists y A(y).$$

例如:

$$\forall x(\neg P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow \forall y(\neg P(y) \to Q(y)).$$

注意：换名规则针对的是约束变量。

代入规则

设A为一阶逻辑公式,将A中某自由变量的所有出现,替换为A中未曾出现的某变量,而A的其余部分不变,得到逻辑公式B,则

$$A \Leftrightarrow B.$$

例如:

$$\exists x \neg P(x,y) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x,z).$$

注意: 代入规则针对的是自由变量。

量词的转换律

$$\neg\forall x\neg A(x) \Leftrightarrow \exists xA(x)$$
$$\neg\exists x\neg A(x) \Leftrightarrow \forall xA(x)$$
$$\neg\forall xA(x) \Leftrightarrow \exists x\neg A(x)$$
$$\neg\exists xA(x) \Leftrightarrow \forall x\neg A(x)$$

量词的分配律

$$\forall x(A(x) \land B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \land \forall xB(x)$$
$$\exists x(A(x) \lor B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \lor \exists xB(x)$$

量词辖域的扩张与收缩律

设B是不含个体变元x的谓词公式,则:

$$\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$$
$$\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B$$
$$\forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow B$$
$$\forall x(A(x) \leftarrow B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \leftarrow B$$
$$\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B$$
$$\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B$$
$$\exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B$$
$$\exists x(A(x) \leftarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \leftarrow B$$

量词的消去

在某一解释I下,若个体域为有限集,如$D=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,则由量词的定义可得出:

$$\forall xA(x)\Leftrightarrow A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\cdots\wedge A(a_n)$$
$$\exists xA(x)\Leftrightarrow A(a_1)\vee A(a_2)\vee\cdots\vee A(a_n)$$

其中$A(a_i)(i=1,2,\cdots,n)$为用a_i代入公式$A(x)$中自由出现的x得到的公式。

含有量词的永真蕴含式

$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$$

$$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$$

$$\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$$

$$\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \rightarrow B(x))$$

注意：这些永真蕴含式的逆均不成立。

多个量词的使用

$$\forall x \forall y A(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x,y)$$
$$\exists x \exists y A(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x,y)$$
$$\forall x \forall y A(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x,y)$$
$$\forall y \forall x A(x,y) \Rightarrow \exists x \forall y A(x,y)$$
$$\exists y \forall x A(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x,y)$$
$$\exists x \forall y A(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x A(x,y)$$
$$\forall x \exists y A(x,y) \Rightarrow \exists y \exists x A(x,y)$$
$$\forall y \exists x A(x,y) \Rightarrow \exists x \exists y A(x,y)$$