解释与赋值

设A为一阶逻辑公式, $\{p_1, \cdots, p_m\}$ 是A中所有的谓词, $\{a_1, \cdots, a_k\}$是A中所有的常量。 A的一个**解释**(Interpretation)I_A是一个三元组:

$$I_A = (D, \{R_1, \cdots, R_m\}, \{d_1, \cdots, d_k\})$$

分别对应于个体域的具体化、谓词的具体化和常量的具体化。在不引起混淆的情况下，有时候就用I表示I_A.

设I_A是一阶逻辑公式A的解释。一个针对该解释的**赋值**(Assignment)σ_{I_A}是一个将所有变量$v \in V$映射成具体值$d \in D$的映射$V \rightarrow D$.

一阶逻辑公式一经赋值,就成为具有确定真值的命题。用$v_{\sigma_{I_A}}(A)$表示一阶逻辑公式A在解释I_A和赋值σ_{I_A}下的真值。在不引起混淆的情况下,有时也简写成v_σ.

例: 给定解释I, 试确定: $S(x), \exists x S(x), S(x) \land \exists x S(x)$在不同解释和赋值下的真值。

解释包括:

(1) I_1:个体域$D_1=\{3,4\}$,$S(x)$表示“x是素数”;

(2) I_2:个体域$D_2=\{3,4\}$,$S(x)$表示“x是偶数”;

(3) I_3:个体域$D_3=\{3,5\}$,$S(x)$表示“x是素数”;

(4) I_4:个体域$D_4=\{3,5\}$,$S(x)$表示“x是偶数”。

赋值根据D_1、D_2、D_3和D_4的具体个体域确定。

$S(x)$,$\exists x S(x)$,$S(x) \wedge \exists x S(x)$的真值如下:

解释	x值	$S(x)$	$\exists x S(x)$	$S(x) \wedge \exists x S(x)$
I_1	3	T	T	T
I_1	4	F	T	F
I_2	3	F	T	F
I_2	4	T	T	T
I_3	3	T	T	T
I_3	5	T	T	T
I_4	3	F	F	F
I_4	5	F	F	F

带量词的公式在具体赋值下的真值:

$$v_{\sigma_I}(\forall x\, A(x)) = T \quad iff \;\; v_{\sigma_I}[x \leftarrow d](A(x)) = T, \forall d \in D$$

$$v_{\sigma_I}(\exists x\, A(x)) = T \quad iff \;\; v_{\sigma_I}[x \leftarrow d](A(x)) = T, \exists d \in D$$

例: $\forall x\, p(a, x)$:

$$I_1 = (N, \{\leq\}, \{0\})$$

$$I_2 = (N, \{\leq\}, \{1\})$$

$$I_3 = (Z, \{\leq\}, \{0\})$$

$$I_4 = (S, \{substr\}, \{''\})$$

若一阶逻辑公式A在某一解释I下为真, 称I是A的一个**模型**(Model), 记作: $I \vDash A$.

若一阶逻辑公式A在任意解释I下均为真,则称A为**永真式**, 记作: $\vDash A$. 否则称A为***存伪式***(Falsible)。

若一阶逻辑公式A在任意解释I下均为假,则称A为**永假式**, 否则称A为**可满足式**(Satisfiable)。

例: $P(x) \vee \neg P(x)$是永真式

$Q(x) \wedge \neg Q(x)$是永假式

$P(x) \vee \exists x Q(x)$是可满足式

例: 判断谓词公式$\forall xA(x) \rightarrow A(y)$是否为永真式。

解: 任意给定个体域D, 假定在该解释下$\forall xA(x)$为真, 则对于任意$d \in D$, 均有$A(d)$为真, 因此$A(y)$也为真。

故$\forall xA(x) \rightarrow A(y)$为永真式。

例: 判断谓词公式$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$是否为可满足式。

定义解释I:个体域D上为整数集,

$P(x)$表示x是整数, $Q(x)$表示x是有理数。

在解释I下, $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$为真。

所以$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$是可满足式。

设$U=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$为一组一阶逻辑公式，$\{p_1,\cdots,p_m\}$是U中所有的谓词，$\{a_1,\cdots,a_k\}$是U中所有的常量。

U的一个解释I_U是一个三元组：

$$I_U=(D,\{R_1,\cdots,R_m\},\{d_1,\cdots,d_k\})$$

分别对应于个体域的具体化、谓词的具体化和常量的具体化。

针对I_U的赋值σ_{I_U}是将所有变量$v\in V$映射成具体值$d\in D$的一个映射$V\to D$.

若一组一阶逻辑公式$U = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$在某一解释$I_U$下为真(对于任意$i$, $v_{I_U}(A_i) = T$), 称I_U是U的一个模型, 记作:$I_U \vDash U$.

若一组一阶逻辑公式U在任意解释I_U下均为真,则称U为一组永真式, 记作: $\vDash U$. 否则称U为一组存伪式。

若一组一阶公式U在任意解释U下均为假,则称U为一组永假式, 否则称U为一组可满足式。