命题逻辑的归结

将逻辑公式转换成合取范式CNF的方法:

1.消去{¬,∧,∨}以外的逻辑联结词。

常见联结词的转换方法:

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

$$A \uparrow B \Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$$

$$A \downarrow B \Leftrightarrow \neg(A \vee B)$$

$$A \leftarrow B \Leftrightarrow A \vee \neg B$$

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

$$A \oplus B \Leftrightarrow \neg(A \rightarrow B) \vee \neg(B \rightarrow A)$$

2.利用德·摩根律将否定联结词¬内移到命题变量之前,消去双重否定。

3.利用分配律化成合取范式。

例: 求$(\neg p \to \neg q) \to (p \to q)$的合取范式。

$$\begin{aligned}
&\neg p \to \neg q) \to (p \to q) \\
&\Leftrightarrow \neg(\neg\neg p \lor \neg q) \lor (\neg p \lor q) \\
&\Leftrightarrow (\neg\neg\neg p \land \neg\neg q) \lor (\neg p \lor q) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \land q) \lor (\neg p \lor q) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \lor \neg p \lor q) \land (q \lor \neg p \lor q)
\end{aligned}$$

例: 求$((p \vee q) \to r) \to p$的合取范式。

$$
\begin{aligned}
& ((p \vee q) \to r) \to p \\
\Leftrightarrow\ & (\neg(p \vee q) \vee r) \to p \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\neg(p \vee q) \vee r) \vee p \\
\Leftrightarrow\ & ((p \vee q) \wedge \neg r) \vee p \\
\Leftrightarrow\ & (p \vee q \vee p) \wedge (\neg r \vee p) \\
\Leftrightarrow\ & (p \vee q) \wedge (\neg r \vee p)
\end{aligned}
$$

一个合取范式是永真式,当且仅当它的每个基本和都是永真式。

一个基本和是永真式,当且仅当至少含有一个命题变量及其否定。

一个子句(Clause)是一个文字集合中所有元素的析取。

一个单位子句(Unit Clause)的文字集合仅含一个文字。

一个空子句(Empty Clause)的文字集合是空集。空子句记为口.

一个公式可以表示成含有若干个子句的集合的形式,称为**子句标准形**(Clause Form)。该公式的真值是子句标准形中所有子句的合取。

子句标准形可以是空集,记为ϕ.

每个公式都可以转换成子句标准形,因为子句标准形与合取范式是对应的。

例:

$$(p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg p \vee q \vee p \vee \neg p) \wedge (r \vee p)$$

合并子句中的相同元素,可化简为:

$$(p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg p \vee q) \wedge (r \vee p)$$

合并相同的子句,可化简为:

$$(p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg p \vee q)$$

对应的子句标准形是:

$$\{\{p, r\}, \{\neg q, \neg p, q\}, \{p, \neg p, q\}\}.$$

子句标准形也可以表达成缩写形式:

$$\{pr, \bar{q}\bar{p}q, p\bar{p}q\}$$

如果一个子句仅包含一对互补的文字$\{p, \neg p\}$,称该子句是平凡的(Trivial).

平凡子句是永真式, 空子句□是永假式。

空子句集ϕ是永真式。

在子句标准形中，**归结**(Resolution)是将包含互补文字的两个子句C_1 $(x \in C_1)$和C_2 $(\bar{x} \in C_2)$转化为一个子句的操作。转化后的子句是:

$$Res(C_1, C_2) = (C_1 - \{x\}) \vee (C_2 - \{\bar{x}\}).$$

例:

$$Res(ab\bar{c}, bc\bar{e})$$
$$= ((ab\bar{c} - \{\bar{c}\}) \vee (bc\bar{e} - \{c\})$$
$$= ab\bar{e}.$$

例:

$$\begin{aligned} &Res(\{x, y\} \vee C_1, \{\bar{x}, \bar{y}\} \vee C_2) \\ &= \{y, \bar{y}\} \vee C_1 \vee C_2 \\ &= true. \end{aligned}$$

定理: $Res(C_1, C_2)$是可满足的,当且仅当子句C_1和C_2都是可满足的。

称$Res(C_1, C_2)$与$C_1 \wedge C_2$是**等可满足性的**(Equisatisfiable), 用≈表示。

p	q	r	$(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$	$p \vee r$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

$\{p,r\} = \{F,F\}$时都为假;$\{p,r\} = \{T,T\}$都为真;

$\{p,r\} = \{F,T\}$都可满足;$\{p,r\} = \{T,F\}$都可满足。

归结过程不唯一

$$\{(1)p, (2)\bar{p}q, (3)\bar{r}, (4)\bar{p}\bar{q}r\}$$

(5)	$\bar{p}\bar{q}$	(3,4)
(6)	$\bar{p}$	(5,2)
(7)	$\square$	(6,1)

$$\{(1)p, (2)\bar{p}q, (3)\bar{r}, (4)\bar{p}\bar{q}r\}$$

(5)	$\bar{p}r$	(2,4)
(6)	r	(5,1)
(7)	$\square$	(6,3)