

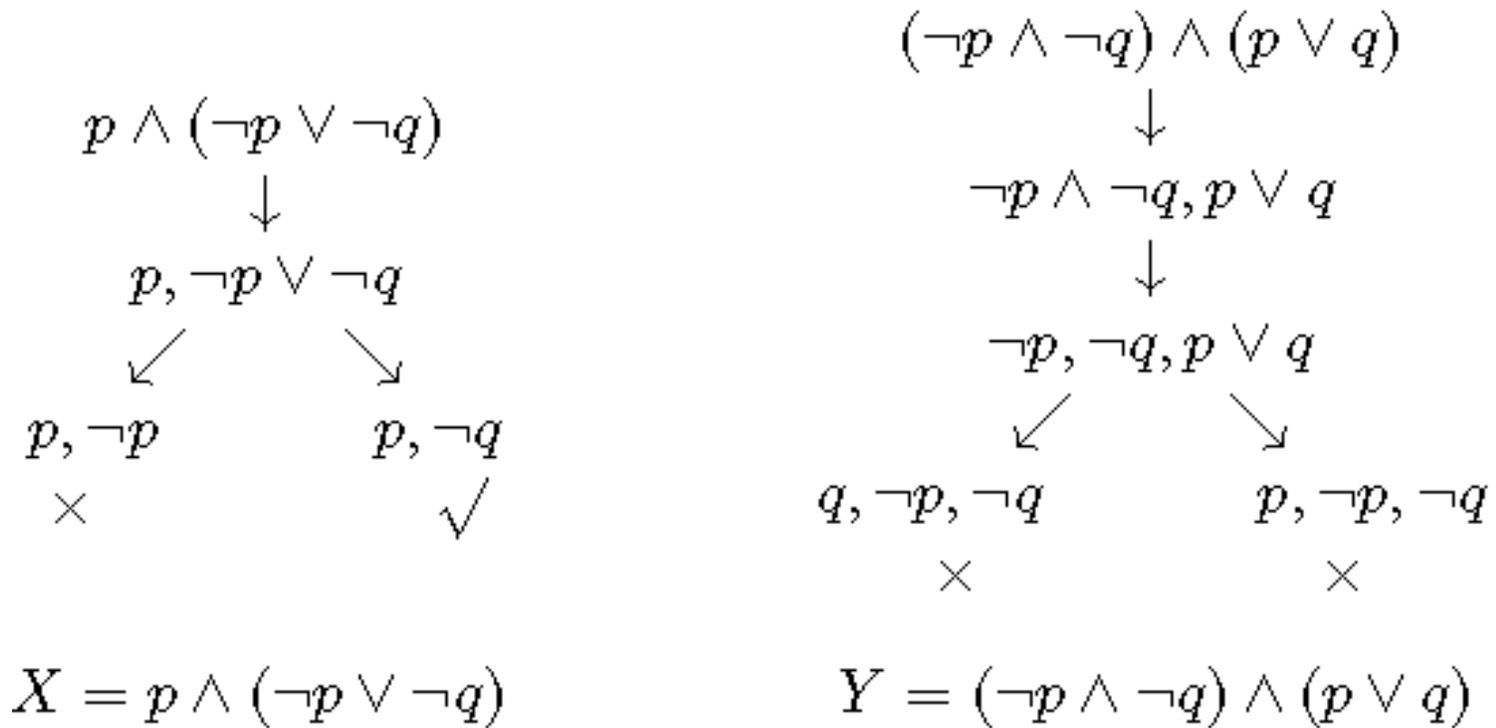


语义树与金琛系统

一个文字(Literal)是一个原子命题或者一个原子命题的否。原子命题称为正文字,原子命题的否称为负文字。对于任意的原子命题 p , $\{p, \neg p\}$ 称为一对互补文字。

定理:一组文字是可满足的,当且仅当这组文字中不包含互补文字。

例如: $S = \{p, q, \neg q, \neg r\}$ 中, p 和 q 是正文字, $\neg q$ 和 $\neg r$ 是负文字, q 和 $\neg q$ 是一对互补文字。因为 S 包含一对互补文字,所以 S 是不可满足的。



✓ is open. × is closed.

通过语义树(Semantic Tableaux)分析公式的可满足性。open分支是可满足的; close分支是不可满足的。

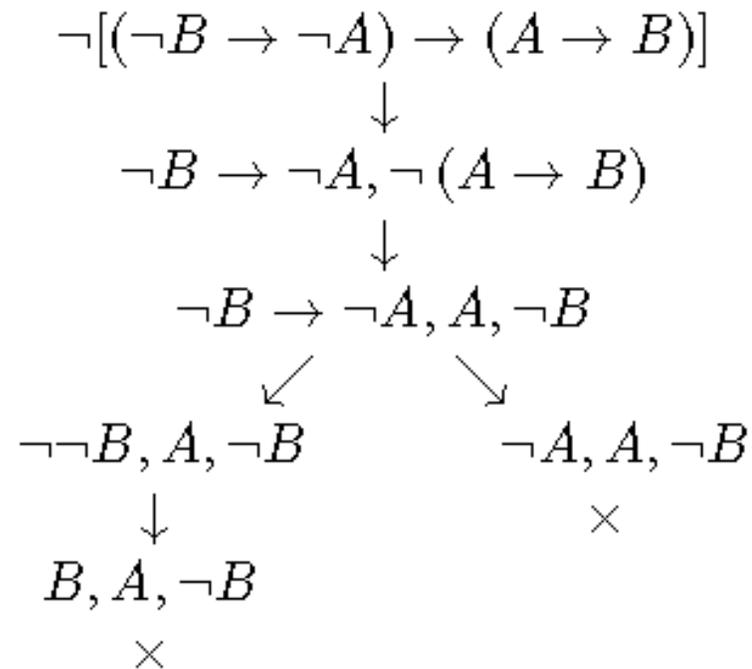
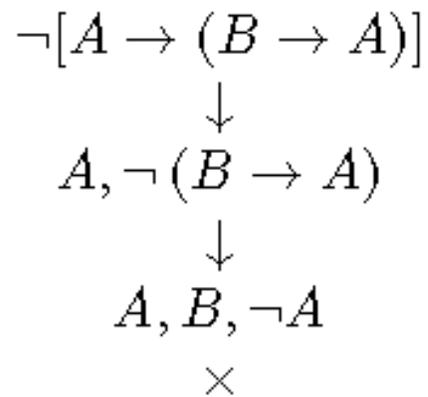
借助 $\{\alpha, \beta\}$ -公式建立语义树。

α -公式

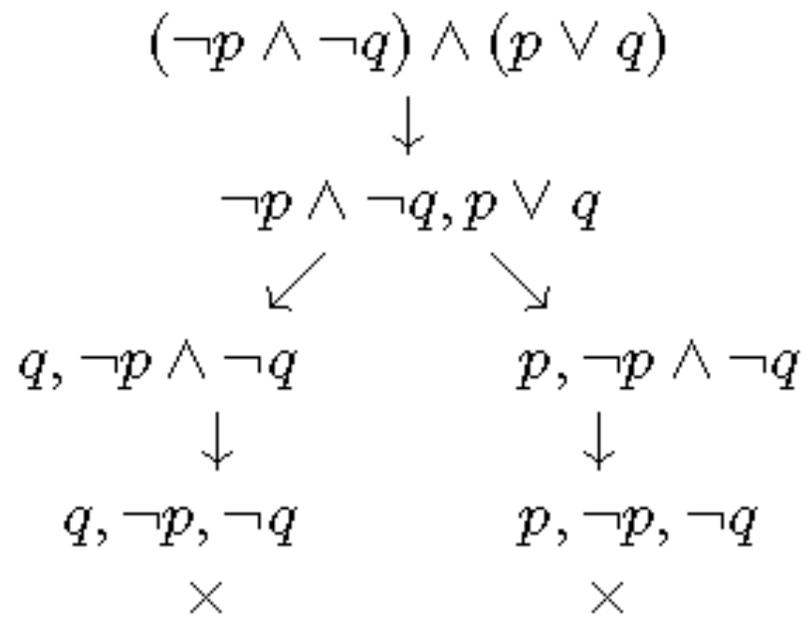
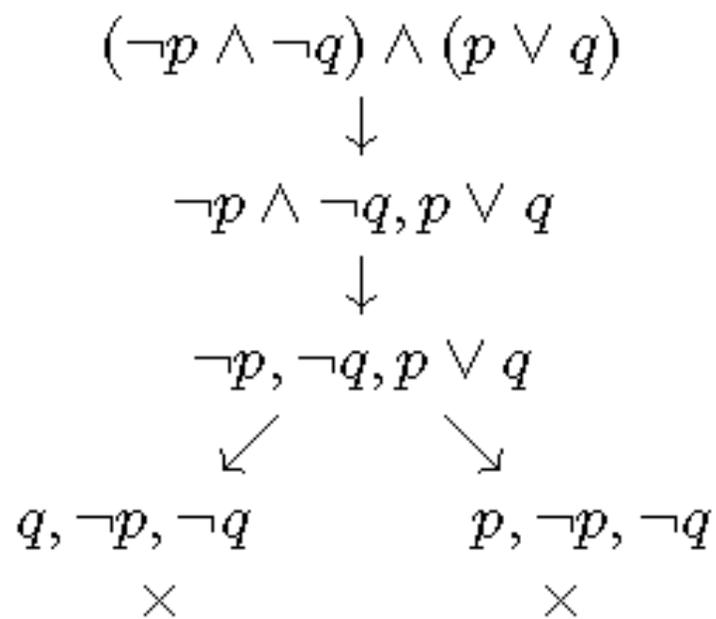
α	α_1	α_2
$\neg\neg A_1$	A_1	
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	A_1	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \uparrow A_2)$	A_1	A_2
$A_1 \downarrow A_2$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$A_1 \leftrightarrow A_2$	$A_1 \rightarrow A_2$	$A_2 \rightarrow A_1$
$\neg(A_1 \oplus A_2)$	$A_1 \rightarrow A_2$	$A_2 \rightarrow A_1$

β -公式

β	β_1	β_2
$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$B_1 \rightarrow B_2$	$\neg B_1$	B_2
$B_1 \uparrow B_2$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(B_1 \downarrow B_2)$	B_1	B_2
$\neg(B_1 \leftrightarrow B_2)$	$\neg(B_1 \rightarrow B_2)$	$\neg(B_2 \rightarrow B_1)$
$B_1 \oplus B_2$	$\neg(B_1 \rightarrow B_2)$	$\neg(B_2 \rightarrow B_1)$



用语义树分析可满足性的两个实例



语义树不唯一

如果一个语义树的所有分支都是不可满足的,称该语义树是不可满足的。否则,称该语义树是可满足的。

定理(完备性, Completeness): 如果一个公式 X 是永真的,那么 $\neg X$ 的语义树是不可满足的。

定理(可靠性, Soundness): 如果一个公式 X 的否 $\neg X$ 的语义树是不可满足的,那么这个公式 X 是永真的。

定理: 一个公式 X 是永真的,当且仅当 $\neg X$ 的语义树是不可满足的。

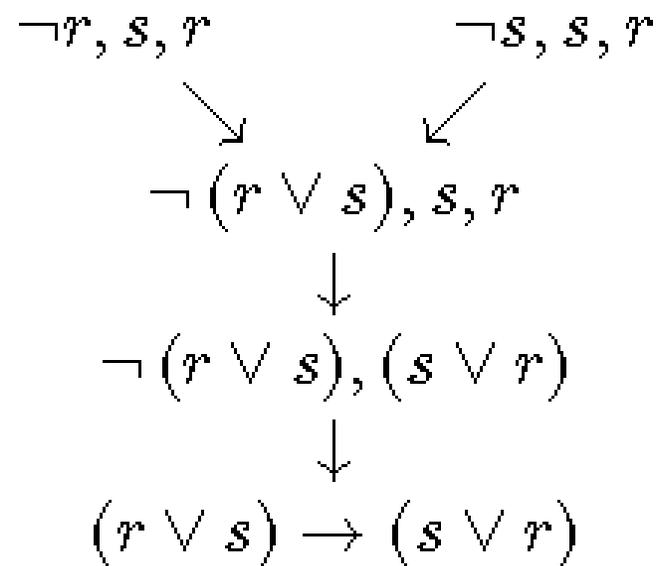
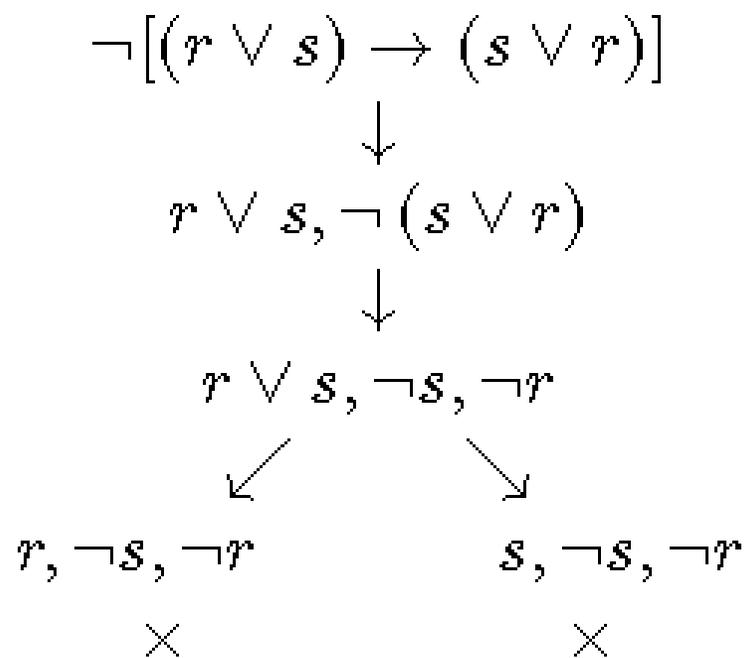
金琛系统(Gentzen System, G)是一个证明系统。金琛系统从不可满足的若干组文字出发,根据 α 和 β 规则逐步推导,最终证明命题。

通过 G 系统证明: $\vdash (r \vee s) \rightarrow (s \vee r)$.

1. $\vdash \neg r, s, r$ *Axiom*
2. $\vdash \neg s, s, r$ *Axiom*
3. $\vdash \neg(r \vee s), s, r$ $\beta, 1, 2$
4. $\vdash \neg(r \vee s), s \vee r$ $\alpha, 3$
5. $\vdash (r \vee s) \rightarrow (s \vee r)$ $\alpha, 4$

证明: $\vdash p \vee (q \wedge r) \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

1.	$\vdash \neg p, p, q$	<i>Axiom</i>
2.	$\vdash \neg p, p \vee q$	$\alpha, 1$
3.	$\vdash \neg p, p, r$	<i>Axiom</i>
4.	$\vdash \neg p, p \vee r$	$\alpha, 3$
5.	$\vdash \neg p, (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\beta, 2, 4$
6.	$\vdash \neg q, \neg r, p, q$	<i>Axiom</i>
7.	$\vdash \neg q, \neg r, p \vee q$	$\alpha, 6$
8.	$\vdash \neg q, \neg r, p, r$	<i>Axiom</i>
9.	$\vdash \neg q, \neg r, p \vee r$	$\alpha, 8$
10.	$\vdash \neg q, \neg r, (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\beta, 7, 9$
11.	$\vdash \neg(q \wedge r), (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\alpha, 10$
12.	$\vdash (p \vee \neg(q \wedge r)), (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\beta, 5, 11$
13.	$\vdash p \vee (q \wedge r) \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\alpha, 12$



金琛系统与语义树之间的联系