语义树与金琛系统

一个**文字**(Literal)是一个原子命题或者一个原子命题的否。原子命题称为**正文字**, 原子命题的否称为**负文字**。 对于任意的原子命题p, $\{p, \neg p\}$称为一对**互补文字**。

定理: 一组文字是可满足的, 当且仅当这组文字中不包含互补文字。

例如: $S = \{p, q, \neg q, \neg r\}$中, p和q是正文字, $\neg q$和$\neg r$是负文字, q和$\neg q$是一对互补文字。因为S包含一对互补文字，所以S是不可满足的。

$$
\begin{array}{ccc}
 & p \wedge (\neg p \vee \neg q) & \\
 & \downarrow & \\
 & p, \neg p \vee \neg q & \\
\swarrow & & \searrow \\
p, \neg p & & p, \neg q \\
\times & & \surd
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
 & (\neg p \wedge \neg q) \wedge (p \vee q) & \\
 & \downarrow & \\
 & \neg p \wedge \neg q, p \vee q & \\
 & \downarrow & \\
 & \neg p, \neg q, p \vee q & \\
\swarrow & & \searrow \\
q, \neg p, \neg q & & p, \neg p, \neg q \\
\times & & \times
\end{array}
$$

$$X = p \wedge (\neg p \vee \neg q) \qquad\qquad Y = (\neg p \wedge \neg q) \wedge (p \vee q)$$

$\surd$ is open. $\times$ is closed.

通过语义树(Semantic Tableaux)分析公式的可满足性。open分支 是可满足的; close分支是不可满足的。

借助$\{\alpha,\beta\}$-公式建立语义树。

α-公式

α	α_1	α_2
$\neg\neg A_1$	A_1	
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	A_1	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \uparrow A_2)$	A_1	A_2
$A_1 \downarrow A_2$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$A_1 \leftrightarrow A_2$	$A_1 \rightarrow A_2$	$A_2 \rightarrow A_1$
$\neg(A_1 \oplus A_2)$	$A_1 \rightarrow A_2$	$A_2 \rightarrow A_1$

β-公式

β	β_1	β_2
$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$B_1 \rightarrow B_2$	$\neg B_1$	B_2
$B_1 \uparrow B_2$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(B_1 \downarrow B_2)$	B_1	B_2
$\neg(B_1 \leftrightarrow B_2)$	$\neg(B_1 \rightarrow B_2)$	$\neg(B_2 \rightarrow B_1)$
$B_1 \oplus B_2$	$\neg(B_1 \rightarrow B_2)$	$\neg(B_2 \rightarrow B_1)$

$$
\begin{array}{c}
\neg[A \to (B \to A)] \\
\downarrow \\
A, \neg(B \to A) \\
\downarrow \\
A, B, \neg A \\
\times
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
 & \neg[(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)] & \\
 & \downarrow & \\
 & \neg B \to \neg A, \neg(A \to B) & \\
 & \downarrow & \\
 & \neg B \to \neg A, A, \neg B & \\
 \swarrow & & \searrow \\
\neg\neg B, A, \neg B & & \neg A, A, \neg B \\
\downarrow & & \times \\
B, A, \neg B & & \\
\times & &
\end{array}
$$

用语义树分析可满足性的两个实例

$$
\begin{array}{ccc}
 & (\neg p \wedge \neg q) \wedge (p \vee q) & \\
 & \downarrow & \\
 & \neg p \wedge \neg q, p \vee q & \\
 & \downarrow & \\
 & \neg p, \neg q, p \vee q & \\
\swarrow & & \searrow \\
q, \neg p, \neg q & & p, \neg p, \neg q \\
\times & & \times
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
 & (\neg p \wedge \neg q) \wedge (p \vee q) & \\
 & \downarrow & \\
 & \neg p \wedge \neg q, p \vee q & \\
\swarrow & & \searrow \\
q, \neg p \wedge \neg q & & p, \neg p \wedge \neg q \\
\downarrow & & \downarrow \\
q, \neg p, \neg q & & p, \neg p, \neg q \\
\times & & \times
\end{array}
$$

语义树不唯一

如果一个语义树的所有分支都是不可满足的,称该语义树是不可满足的。否则, 称该语义树是可满足的。

定理(完备性, Completeness): 如果一个公式X是永真的, 那么$\neg X$的语义树是不可满足的。

定理(可靠性, Soundness): 如果一个公式X的否$\neg X$的语义树是不可满足的,那么这个公式X是永真的。

定理: 一个公式X是永真的, 当且仅当$\neg X$的语义树是不可满足的。

金琛系统(Gentzen System, $\mathcal{G}$)是一个证明系统。金琛系统从不可满足的若干组文字出发，根据α和β规则逐步推导，最终证明命题。

通过$\mathcal{G}$系统证明:$\vdash (r \vee s) \rightarrow (s \vee r)$.

1.	$\vdash \neg r, s, r$	$Axiom$
2.	$\vdash \neg s, s, r$	$Axiom$
3.	$\vdash \neg(r \vee s), s, r$	$\beta, 1,2$
4.	$\vdash \neg(r \vee s), s \vee r$	$\alpha, 3$
5.	$\vdash (r \vee s) \rightarrow (s \vee r)$	$\alpha, 4$

证明:$\vdash p \vee (q \wedge r) \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

1.	$\vdash \neg p, p, q$	$Axiom$
2.	$\vdash \neg p, p \vee q$	$\alpha, 1$
3.	$\vdash \neg p, p, r$	$Axiom$
4.	$\vdash \neg p, p \vee r$	$\alpha, 3$
5.	$\vdash \neg p, (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\beta, 2,4$
6.	$\vdash \neg q, \neg r, p, q$	$Axiom$
7.	$\vdash \neg q, \neg r, p \vee q$	$\alpha, 6$
8.	$\vdash \neg q, \neg r, p, r$	$Axiom$
9.	$\vdash \neg q, \neg r, p \vee r$	$\alpha, 8$
10.	$\vdash \neg q, \neg r, (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\beta, 7,9$
11.	$\vdash \neg (q \wedge r), (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\alpha, 10$
12.	$\vdash (p \vee \neg (q \wedge r)), (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\beta, 5,11$
13.	$\vdash p \vee (q \wedge r) \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\alpha, 12$

$$
\begin{array}{ccc}
 & \neg[(r \vee s) \to (s \vee r)] & \\
 & \downarrow & \\
 & r \vee s, \neg(s \vee r) & \\
 & \downarrow & \\
 & r \vee s, \neg s, \neg r & \\
\swarrow & & \searrow \\
r, \neg s, \neg r & & s, \neg s, \neg r \\
\times & & \times
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
\neg r, s, r & & \neg s, s, r \\
\searrow & & \swarrow \\
 & \neg(r \vee s), s, r & \\
 & \downarrow & \\
 & \neg(r \vee s), (s \vee r) & \\
 & \downarrow & \\
 & (r \vee s) \to (s \vee r) &
\end{array}
$$

金琛系统与语义树之间的联系