

等价式与蕴含式

设 A 和 B 是两个命题公式,若对 A 和 B 的任何相同解释, A 和 B 总是取得相同的真值,则称命题公式 A 和 B 是**逻辑等价** (Logically Equivalent) 的,记做 $A \Leftrightarrow B$. $A \Leftrightarrow B$ 称为等价式。

“ \Leftrightarrow ”不是联结词。 $A \Leftrightarrow B$ 不是一个公式,它表示两个公式间的逻辑等价关系。

而“ \leftrightarrow ”是联结词, $A \leftrightarrow B$ 是一个公式。

$A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 为真。

可通过真值表来判定逻辑等价关系。

例如：

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

以下是一些常用的逻辑等价式：

双重否定律 (Double negation law)

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A$$

等幂律 (Idempotent laws)

$$A \vee A \Leftrightarrow A$$

$$A \wedge A \Leftrightarrow A$$

结合律 (Associative laws)

$$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$$

$$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$$

交换律 (Commutative laws)

$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$$

$$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$$

分配律 (Distributive laws)

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

吸收律 (Absorption laws)

$$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$$

$$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$$

德·摩根律 (De Morgan's laws)

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

同一律 (Identity laws)

$$A \vee F \Leftrightarrow A$$

$$A \wedge T \Leftrightarrow A$$

零律 (Domination laws)

$$A \vee T \Leftrightarrow T$$

$$A \wedge F \Leftrightarrow F$$

补余律 (Negation laws)

$$A \vee \neg A \Leftrightarrow T$$

$$A \wedge \neg A \Leftrightarrow F$$

条件转化律 (Conditionals, Material Implication)

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$$

$$\neg(A \rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$$

双条件转化律 (Biconditionals, Material Equivalence)

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

归谬律 (Reductio ad absurdum)

$$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$$

输入输出律 (Exportation, Importation)

$$(A \wedge B) \rightarrow C \Leftrightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

设 A, B 为两个命题公式,若 $A \rightarrow B$ 为真,即 $A \rightarrow B \Leftrightarrow T$,则称 $A \rightarrow B$ 为永真蕴含式,也称命题公式 A 永真蕴含命题公式 B ,记作 $A \Rightarrow B$.

“ \Rightarrow ”不是联结词,“ $A \Rightarrow B$ ”不是公式,它表示公式 A 与 B 之间存在永真蕴含关系。

“ \rightarrow ”是联结词, $A \rightarrow B$ 是一个公式。

$A \Rightarrow B$ 当且仅当 $A \rightarrow B$ 为真。

以下是一些常用的永真蕴含式：

化简式 (Simplification)

$$A \wedge B \Rightarrow A$$

$$A \wedge B \Rightarrow B$$

附加式 (Addition)

$$A \Rightarrow A \vee B$$

$$B \Rightarrow A \vee B$$

假言推理 (Modus Ponens)

$$A \wedge (A \rightarrow B) \Rightarrow B$$

拒取式 (Modus Tollens)

$$\neg B \wedge (A \rightarrow B) \Rightarrow \neg A$$

析取三段论 (Disjunctive Syllogism)

$$\neg A \wedge (A \vee B) \Rightarrow B$$

假言三段论 (Hypothetical Syllogism)

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$$

双条件三段论

$$(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$$

构造性二难 (Constructive Dilemma)

$$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \wedge C) \Rightarrow B \wedge D$$

$$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow B \vee D$$

二难推论 (Disjunction Elimination)

$$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow B) \wedge (A \wedge C) \Rightarrow B$$

$$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow B) \wedge (A \vee C) \Rightarrow B$$