



符号化与命题公式

通常,命题是具有真假意义或能判断真假的陈述句。

(1)您好?

(2)请勿吸烟!

(3)台湾是中国的一部分。

(4)人能活一千岁。

(5)月球上有生物存在。

(1)和(2)一个是疑问句一个是祈使句,都不是陈述句,所以不是命题。

由简单句构成的命题称**原子命题**。

可以用**命题标识符**来实现原子命题符号化：

p : 人能活一千岁；

q : 月球上有生物存在。

由若干原子命题和**联结词**联结而成的命题称**复合命题**。

“如果我有一双翅膀,那么我能在蓝天上飞翔。”

包含两个原子命题,是复合命题。

可先对原子命题进行符号化：

p : 我有一双翅膀;

q : 我能在蓝天上飞翔。

然后再对复合命题进行符号化；

$$p \rightarrow q.$$

“ \rightarrow ”与“ \wedge ”和“ \vee ”类似，都是联结词，表示“如果…，那么…”

当 p 为假或 q 为真时， $p \rightarrow q$ 为真。

原子命题和复合命题都是命题公式。

命题公式是表示命题的公式。常见的形式是带括号的表达式。

$$A: (p \rightarrow q) \leftrightarrow ((\neg q) \rightarrow (\neg p))$$

$$B: (p \rightarrow (q \leftrightarrow (\neg(p \rightarrow (\neg q))))))$$

在A和B中,各命题标识符和联结词顺序都相同。但是,由于使用了不同位置的括号,所表达的语义不同。

采用优先级可以去掉某些括号。以下是通常关于优先级的约定：

1. \neg 2. \wedge, \uparrow 3. \vee, \downarrow 4. \rightarrow 5. \leftrightarrow, \oplus

其中：1的优先级最高,5的优先级最低。

联结词中： \neg 表示否定； \wedge 表示与/合取；

\uparrow 表示与非； \vee 表示或/析取； \downarrow 表示或非；

\leftrightarrow 表示左右蕴含； \oplus 表示异或。

有了约定的优先级,可对前面的公式进行化简:

$$A: p \rightarrow q \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$$

$$B: (p \rightarrow (q \leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)))$$

对于A,在没有括号的情况下,先进行优先级为1的 $\neg q$ 和 $\neg p$ 运算;然后进行优先级为4的 $p \rightarrow q$ 运算和 $\neg q \rightarrow \neg p$ 运算;最后进行优先级为5的 \leftrightarrow 运算。

优先级可以减少括号的使用,但B仍需必要的括号。

采用波兰表达式 (Polish Notation) 或逆波兰表达式的方法可以完全去掉括号。

A的波兰表达式:

$$A: \leftrightarrow \rightarrow pq \rightarrow \neg p \neg q$$

A的逆波兰表达式:

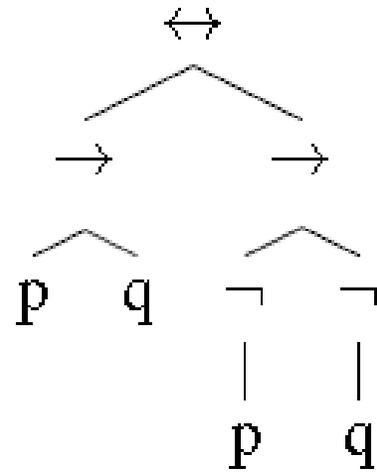
$$A: q \neg p \neg \rightarrow qp \rightarrow \leftrightarrow$$

B的波兰表达式:

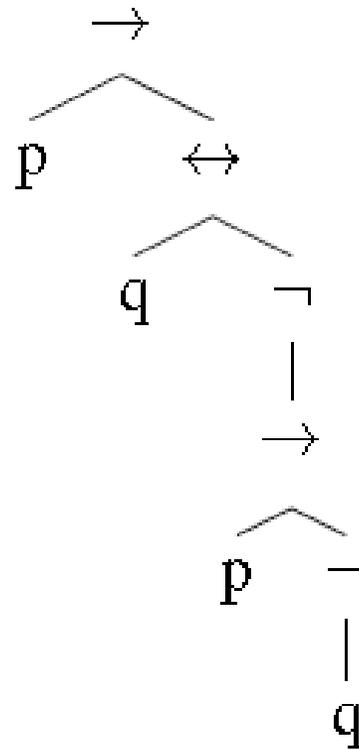
$$B: \rightarrow p \leftrightarrow q \neg \rightarrow p \neg q$$

B的逆波兰表达式:

$$B: q \neg p \rightarrow \neg q \leftrightarrow p \rightarrow$$



(a)



(b)

命题公式也可以用树表达。树的先序、后序和中序遍历分别对应波兰表达式、逆波兰表达式和带括号的普通形式。

命题公式可以用形式化公式(Well Formed Formulas, wff)来定义:

1. $wff ::= p, \forall p \in P$
2. $wff ::= \neg wff$
3. $wff ::= wff \text{ op } wff$
4. $op ::= \vee | \wedge | \rightarrow | \leftrightarrow | \oplus | \uparrow | \rightarrow$

其中 P 是原子命题集合, op 是联结词。

1. p 和 q 都是公式;
2. $\neg p$ 和 $\neg q$ 是公式;
3. $p \rightarrow q$ 和 $\neg q \rightarrow \neg p$ 是公式;
4. A: $p \rightarrow q \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$ 是公式。

同理:

5. $p \rightarrow \neg q$ 是公式;
6. $\neg(p \rightarrow \neg q)$ 是公式;
7. $q \leftrightarrow (\neg(p \rightarrow \neg q))$ 是公式;
8. B: $(p \rightarrow (q \leftrightarrow (\neg(p \rightarrow \neg q))))$ 是公式。