集合论相关定理

定义($\preccurlyeq$). 设A和B是两个集合，

A的势小于等于B($A \preccurlyeq B$)当且仅当存在一个单射$f: A \to B$.

A的势小于B($A \prec B$)当且仅当$A \preccurlyeq B$且$A \nsim B$.

例如：若$A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$, 则$A \preccurlyeq B$). 因为存在一个单射：$a \to 1, b \to 3$, $c \to 4, d \to 5$.

同时，$A \prec B$也成立，因为$A \nsim B$.

此外，$A \prec N$、$B \prec N$都成立。

定理: A是一个集合,$P(A)$是A的幂集,则:
$A \prec P(A)$.

证明: 首先，因为$A \subseteq P(A)$，所以存在一个$A \to P(A)$的单射，即$f(a) \to \{a\}$. 所以$A \preccurlyeq P(A)$.

下面证明对于给定的任意集合A,无法找到满射函数$f: A \to P(A)$. 如果存在一个A的子集，它不是A中某元素的像，命题便可得证。

通过对角化方法来构造:

$$B=\{x\in A: x\notin f(x)\}.$$

就是说,对于所有的A中元素x,$x\in B$当且仅当$x\notin f(x)$.

显然，B是$P(A)$的元素.

对于所有x,集合B与$f(x)$不可能是相等,因为B由A中元素不包含在$f(A)$里的所有元素构成。

考虑$x\in A$. 要么$x\notin \mathrm{B}$，当且仅当$x\in f(x)$.
要么$x\in \mathrm{B}$, 当且仅当$x\notin f(x)$.

前一种情况, $f(x)$不能等于B,因为$x \in f(x)$(假设)并且$x \notin B$(B的定义).

后一种情况, $f(x)$也不能等于B,因为$x \notin f(x)$(假设)并且$x \in B$(B的定义).

总之, $f(x)$不能等于B. 而前面B是$P(A)$的元素, 所以f不是满射, 即$A \prec P(A)$.

康托定理: $N \nsim P(N)$.

可以看作前面已证定理的特例。

定理:（Cantor-Bernstein）A和B都是任意集合,如果:$A \preccurlyeq B$,$B \preccurlyeq A$, 则有:$A \sim B$.

证明: 略。

定理: $N \sim Q$

证明: 可以定义一个单射$f: N \to Q$,其中$f(n) = n$，因此$N \preccurlyeq Q$.

然后定义函数$g: Q \to N$. $g(0) = 0$. 当$q(\in Q) \neq 0$时，令$q = \frac{\mu a}{b}$,其中$\mu = \pm 1, a > 0, b > 0, gcd(a, b) = 1$.

$$g(q)=2^{\mu+1}3^a5^b$$

是一个单射函数, 所以$N\preccurlyeq Q$.

综上，可得$N\sim Q$.

定理: $(0,1)\sim R$

证明: 存在一个一一映射$f:(0,1)\to R$:

$$f(x)=tg(\pi x-\frac{\pi}{2}).$$

因此$(0,1)$与R等势，即$(0,1)\sim R$.

定理: $R \sim P(N)$.

证明: 根据刚才的定理,本定理等同于$(0,1) \sim P(N)$. 不难发现$k \in (0,1)$都有完全不同的十进制展开形式： $k = 0.k_1k_2k_3\cdots$,其中$0 \le k_n < 9$.

定义一个函数$f: (0,1) \to P(N)$:

$$f(r) = p_1^{(k_1+1)}p_2^{(k_2+1)}p_3^{(k_3+1)}\cdots$$

其中,p_1,p_2,…是从小往大排的素数。不难验证,这是一个单射函数，所以$(0,1) \preccurlyeq P(N)$.

然后，再定义一个$g: P(N) \to (0,1)$. 对于任意$S \subset N$, $g(S) = 0.S_0S_1S_2\cdots$,这里的下标n如果属于S,那么S_n取3,否则取5. 不难验证,g也是一个单向函数,所以$P(N) \preccurlyeq (0,1)$.

综上,可得$R \sim P(N)$.

定理: 如果$S \subseteq N$,那么或者S是有限集,或者$S \sim N$.

简单证明: 若S是无限的,列出S的元素S_0 ,S_1 ,S_2 ,$\cdots$, 本身就是N到S的单射。

定义:（Cantor）

(1)自然数集合N的势记作$\aleph_0$(阿列夫0).

(2)实数集合R的势记作$\aleph_1$(阿列夫1).

定理: $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$

定理: $\aleph_0\times\aleph_0=\aleph_0$

接下来,将不加证明地列出一些集合论相关的公理或定理。

选择公理（Axiom of Choice）: 设F是一个以非空集合为元素的集合，那么存在一个函数f使得$f(A) \in A$对于每一个$A \in F$. 称f是F的选择函数。

良序定理（Well-ordering Theorem）: 自然数集的每个非空子集都有一个最小元素,即自然数在普通的大小关系下构成一个良序集。

良序定理等价于选择公理,又称**策梅洛定理**（Zarmelo’s Theorem）.

佐恩引理（Zorn’s Lemma）: A和B是任意集合,要么$A \preccurlyeq B$,要么$B \preccurlyeq A$.

佐恩引理是良序定理的基础。

连续统假设（Continuum Hypothesis）: 如果$S \subseteq R$,那么S是可数的,要么$S \sim R$.

定理（Gödel, Cohen）: 如果关于集合的公理是一致的，不可能通过这些公理来证明或证否连续统假设。