势与可数集

对于一个集合A,如果它是由有限个元素组成的,则称A为有限集合,简称**有限集**。

对于一个有限集A来说,通常把A中不同元素的个数称为A的**势**,用$|A|$来表示。

若A中包含m个不同元素,记$|A| = m$,也称A为m**元集**。

例如：$A = \{1,2,3, a, b, c\}$, $|A| = 6$, A是6元集。

不是有限集合的集合称为无限集合,简称**无限集**。

设有集合A与B，如果存在一个从A到B的双射函数$f: A \to B$，那么称A与B**等势**（Equinumerous），记作$A \sim B$.

求证:（Galileo）自然数集N与非负偶数集M等势。

证明：N与M之间存在一个双射函数:

$$f(n) = 2n$$

所以$N \sim M$.

求证：自然数集N与整数集Z是等势的。

证明：将N和Z的元素按下列顺序排列,可以得到一一对应关系：

$$N: 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ \cdots \ n \ \cdots$$
$$Z: \ 0 \ \ -1 \ 1 \ \ -2 \ 2 \ \cdots \ f(n) \ \cdots$$

其中

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & if\ n\ is\ even \\ -\dfrac{n+1}{2} & if\ n\ is\ odd \end{cases}$$

显然f是双射函数,因此$N \sim Z$.

设R是实数集合,S是R的子集, 且$S = \{x|x \in R, 0 < x < 1\}$, 试证明$S \sim R$.

证明：令 $f: S \to R$

$$f(x) = tg(\pi x - \pi/2)\ (0 < x < 1)$$

显然，f的值域是R，且f是双射函数，所以$S \sim R$.

或令$f: R \to S$,

$$f(x) = 1/\pi\, tg^{-1} x + 1/2$$

$(-\infty < x < \infty)$，f的值域是S. 显然f是双射函数，所以$S \sim R$.

定理:集合族上的等势关系是一个等价关系。

证明:设集合族为S,

$$R=\{\langle A,B\rangle | A,B\in S\wedge A\sim B\}.$$

(1)对于任意$A\in S$，必有$A\sim A$，所以$\langle A,A\rangle\in R$.

(2)对于任意$A,B\in S$，若$\langle A,B\rangle\in R$，即$A\sim B$，则必有$B\sim A$，所以$\langle B,A\rangle\in R$.

(3)对于任意$A,B,C\in S$，若$\langle A,B\rangle,\langle B,C\rangle\in R$，即$A\sim B$且$B\sim C$，则必有$A\sim C$，即$\langle A,C\rangle\in R$.

求证：自然数集合N是无限集合。

证明：设m是N中的任意元素，f是任意从$N_m = \{1, 2, 3, \cdots, m\}$到$N$的函数。

$$f: \{1,2,3, \cdots, m\} \rightarrow N$$

设$k = 1 + max\{f(1), f(2), \cdots, f(m)\}$

显然，$k \in N$.

但对每一个$x \in \{1,2, \cdots, m\}$,有$f(x) \neq k$,

因此f不是满射的,所以f不是双射函数。

因为m和f都是任意的,故N是无限集合。

求证：区间[0,1]与区间(0,1)等势。

证明：设集合$A=\{0,1,1/2,\cdots,1/n,\cdots\}$，显然，$A\subseteq[0,1]$.

定义$f:[0,1]\to(0,1)$，使得:

$$\begin{cases} f(0)=1/2 & \\ f(1/n)=1/(n+2) & n\geq 1 \\ f(x)=x & x\in[0,1]-A \end{cases}$$

则f是双射函数。

所以，区间[0,1]与区间(0,1)等势。

定义：与自然数集合的子集等势的集合称**可数集**。可数集可以是有限集。不是可数集的无限集合称**不可数集**。

例：

$$A=\{1,4,9,16,\cdots,n^2,\cdots\}$$
$$B=\{3,12,27,\cdots,3n^2,\cdots\}$$
$$C=\{1,1/2,1/3,\cdots,1/n,\cdots\}$$

都是可数集。

而R、[0,1]是不可数集。

定理：A为无限可数集合的充要条件是A可以排列成：$A=\{a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$.

证明：(充分性)如果A可以排列成上述形式，那么将A的元素a_n与足标n对应，就得到A与N之间一一对应关系$n\leftrightarrow a_n$，即A与N等势，故A是无限可数集。

(必要性)若A是无限可数集,则在A与N之间存在一一对应关系f,由f得到n的对应元素a_n:

$$f(n)\rightarrow a_n$$

即A可写成$\{a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$的形式。

定理：任意无限集必含可数子集。

证明：设A为无限集合, 从A中取出一个元素a_0.

由于A是无限的,不会因为取出a_0而成为空集。所以,可从$A-\{a_0\}$中取出元素a_1.

同样$A-\{a_0, a_1\}$也是非空集, 又可从中取出元素$a_2, \cdots$.

如此继续下去,就得到A的可数子集:

$$\{a_0, a_1, \cdots, a_n \cdots\}.$$

定理：任意无限可数集必与其某一真子集等势。

证明:设M为无限可数集,则M必含有无限可数子集

$$A=\{a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots\},$$

设$B=M-A,C=M-\{a_0\}$, 显然$C\subset M$.

现构造$f:M\to C$,使得

$$\begin{cases} f(a_n)=a_{n+1} & n=0,1,2,\cdots \\ f(b)=b & b\in B \end{cases}$$

这个f是双射的,所以$M\sim C$.

定理：可数个两两不相交的可数集合的并集,仍然是一可数集。

证明：设可数个可数集分别是

$$S_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{1n}, \cdots\}$$
$$S_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \cdots, a_{2n}, \cdots\}$$
$$S_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \cdots, a_{3n}, \cdots\}$$
$$\cdots$$

令$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \cdots$, 对$S$的元素按以下方式排列:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

在上述排列中,由左上端开始,其每一斜线上的每一元素的两下标之和都相同,分别为:2,3,4,⋯,各斜线上元素的个数分别为: 1,2,3,4,⋯,故S的元素可排列成:

$$a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, \cdots,$$

它仍然是一可数集。