关系与映射

定义:由两个具有给定次序的x和y所组成的序列称为**序偶**(Ordered Pair),记作$\langle x, y\rangle$.其中,x称为第**1分量**, y称为第2分量。

当$x \neq y$时, $\langle x, y\rangle \neq \langle y, x\rangle$, $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$的充分必要条件是: $x = u, y = v$.

设A, B是任意两个集合,用A中元素为第1分量,B中元素为第2分量构成序偶。这样的序偶组成的集合称为A和B的**笛卡尔积**(Cartesian Product).

$$A \times B = \{\langle x, y\rangle | x \in A, y \in B\}.$$

例如: 花色 $\times$ 大小的笛卡尔积是: $\{(\lozenge,A),(\lozenge,K),(\lozenge,Q),(\lozenge,J),(\lozenge,10),\cdots\cdots,(\heartsuit,6),(\heartsuit,5),(\heartsuit,4),(\heartsuit,3),(\heartsuit,2)\}$.

由n个具有给定次序的个体$a_1,a_2,\cdots,a_n$组成的序列, 称为**有序n元组**, 记作: $\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$, 其中$a_i$称为第$i$个分量。

$$\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle=\langle b_1,b_2,\cdots,b_n\rangle$$

当且仅当

$$a_i=b_i\,(i=1,2,\cdots,n).$$

设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是任意给定的n个集合,若有序n元组$\langle a_1, a_2, \cdots, a_n\rangle$的第1分量取自集合$A_1$,第2分量取自$A_2$,…,第$n$分量取自$A_n$,则由所有这样的有序$n$元组组成的集合称为集合$A_1, A_2, \cdots, A_n$的**笛卡儿积**,并用$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$表示。即

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{\langle a_1, a_2, \cdots, a_n\rangle \\ | a_i \in A_i, i = 1,2, \cdots, n\}.$$

求证: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ 成立。

证明:对任意的$\langle x, y\rangle$, $\langle x, y\rangle \in A \times (B \cup C)$,有:

$$x \in A \land y \in (B \cup C)$$

$$x \in A \land (y \in B \lor y \in C)$$

$$(x \in A \land y \in B) \lor (x \in A \land y \in C)$$

$$\langle x, y\rangle \in A \times B \lor \langle x, y\rangle \in A \times C$$

$$\langle x, y\rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

所以$A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$.

对任意的$\langle x,y\rangle$,$\langle x,y\rangle \in (A\times B)\cup(A\times C)$,
有:

$$\langle x,y\rangle \in A\times B \vee \langle x,y\rangle \in A\times C$$
$$(x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$$
$$x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$$
$$x\in A\wedge y\in(B\cup C)$$
$$\langle x,y\rangle \in A\times(B\cup C)$$

所以$(A\times B)\cup(A\times C)\subseteq A\times(B\cup C)$.

综上:$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

如果一个集合的全部元素都是序偶,则称这个集合为一个**二元关系**,记作R.

例:设$A=\{2,3,4\}$,定义

$$R_1=\{\langle x,y\rangle | x,y\in A\wedge x>y\}$$

即:

$$R_1=\{\langle 4,3\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 3,2\rangle\}$$

表示集合A上元素的大于关系。

设A, B是任意两个集合,$A \times B$的任意一个子集所定义的二元关系R称为从集合A到集合B的一个二元关系。 当$A = B$时,称R为A上的二元关系。

例:设$A = \{1,2,3\}, B = \{a, b\}$,则:

$$A \times B = \{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, a\rangle, \langle 3, b\rangle\}$$

$A \times B$的任何子集都是一个二元关系。

设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是任意给定的集合,笛卡儿积$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$的任意一个子集$R$称为$A_1, A_2, \cdots, A_n$上的一个$n$元关系。特别的，当$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$时,称$R$为$A$上的$n$元关系。

设A和B是任意给定的两个集合,f是从A到B的二元关系。若对于任意的$x \in A$,存在唯一的$y \in B$,使得$\langle x, y \rangle \in f$,则称关系$f$为从$A$到$B$的一个**函数**或**映射**, 记作$f: A \to B$.

若有$\langle x, y\rangle \in f$,则称$x$是**原像**(或自变量),称$y$为$f$作用下$x$的**像**。通常用$y = f(x)$表示$\langle x, y\rangle \in f$.

二元关系和函数的区别如下:

(1)函数的定义域必须等于A. 二元关系的定义域可以是A,也可以是A的一个子集。

(2)作为二元关系,一个x可以对应多个不同的y.而作为函数,一个x只能对应一个y.

定理:设A, B都是有限集,$|A| = m, |B| = n$,则从A到B共有n^m个不同的函数。

通常用B^A表示从A到B的所有不同函数构成的集合,即:

$$B^A = \{f | f: A \to B\}.$$

对于函数$f: X \to Y$,

(1)若$V(f) = Y$,则称f是**满射** (Surjection).

(2)对任意的$x_1, x_2 \in X$,当$x_1 \neq x_2$时必有$f(x_1) \neq f(x_2)$,则称f是**单射** (Injection).

(3)若f既是满射的又是单射的,则称f为**双射** (Bijection).

例:以下是4个不同类型的函数:

$$f_1:\{a,b,c,d\} \to \{1,2,3\},$$
$$f_1 = \{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,3\rangle,\langle d,3\rangle\}$$
$$f_2:\{a,b,c\} \to \{1,2,3,4\},$$
$$f_2 = \{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,3\rangle\}$$
$$f_3:\{a,b,c\} \to \{1,2,3\},$$
$$f_3 = \{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,3\rangle\}$$
$$f_4:\{a,b,c\} \to \{1,2,3\},$$
$$f_4 = \{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,3\rangle\}$$

例:设$A=\{a,b\},B=\{c,d,e\}$,定义:$f{:}\,A\to B$, $f=\{\langle a,c\rangle,\langle b,d\rangle\}$ (单射但不是满射)，那么f^{-1}是B到A的关系是f的逆关系。

$$f^{-1}=\{\langle c,a\rangle,\langle d,b\rangle\},$$

$D(f^{-1})=\{c,d\}\neq B$，所以f^{-1}并不是函数。

设$f{:}\,X\to Y$是一个双射函数,称f的逆关系为f的**逆函数** (Inverse Function),记作f^{-1}.

若f的逆函数f^{-1}存在,则称f是可逆的。

设有函数$f: X \to Y, g: Y \to Z$,则

$$g \circ f: X \to Z = \{\langle x, z\rangle | x \in X \wedge z \in Z \wedge \exists y \in Y, y = f(x) \wedge z = g(y)\}$$

称为f和g的**复合函数**(Composition). 即

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

求证: 如果$f: X \to Y, g: Y \to Z$都是满射, 那么

$g \circ f: X \to Z$也是满射。

证明: 设z是Z的任意元素,因为g是满射,所以存在$b \in B$使得$g(y) = z$.

又因为f是满射, 所以存在$a \in A$使得$g(x) = y$. 于是$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = z$,所以$g \circ f$是满射。