



集合

把一些事物汇集到一起组成一个整体，称为集合 (Set). 这些事物称为集合的元素 (Element).

若 a 是集合 S 中的元素,记作 $a \in S$.

集合具有无序性和互异性:

- **无序性**: 在一个集合中,每个元素的地位相同,元素之间是无序的。例如: $\{1,2,3,4\}$ 和 $\{1,3,2,4\}$ 是同一个集合。
- **互异性**: 在一个集合中,任何两个元素都互不相同,即每个元素只能出现一次。例如: $\{1,1,2\}$ 不是集合。

可以存在这样的集合,其元素本身也是一个集合。例如:
 $X = \{a, 3, \{s, 2\}, \{t\}, 8\}.$

关于一些常见集合表示符的约定:

- N :自然数集合 $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Z :整数集合
- Z_+ :正整数集合
- P :素数集合 $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$
- R :实数集合
- C :复数集合
- Q :有理数集合

不含任何元素的集合为**空集**,记作 Φ .

设 A 和 B 是任意给定的两个集合,如果 A 的每一个元素都是 B 的元素,则称集合 A 是集合 B 的**子集**,或称集合 A 包含于集合 B ,或集合 B 包含集合 A . 记作 $A \subseteq B$,或 $B \supseteq A$.

$$A \subseteq B ::= \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

对于任意的非空集合 S ,必然有 $\Phi \subseteq S$ 和 $S \subseteq S$. 称 Φ 和 S 为 S 的**平凡子集**。

设 A, B 是两个集合,如果 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$,称 A 是 B 的**真子集**,记为 $A \subset B$. 例如: 整数集是实数集的真子集($Z \subset R$).

对于任意集合 A 、 B 和 C ,有:

- $A \subseteq A$. 即 $\subseteq$ 具有自反性(Reflexivity).
- 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,则 $A = B$. 即 $\subseteq$ 具有反对称性(Antisymmetric).
- 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$. 即 $\subseteq$ 具有传递性(Transitivity).

外延公理(Axiom of Extensionality): 如果集合 A 和 B 有完全相同的元素,那么集合 A 和 B 相等,记作 $A = B$.

给定集合 A ,以 A 的全部子集为元素构成的集合,称为 A 的**幂集** (Power set),记为 $P(A)$ 或 2^A .

$$P(A) = \{x | x \subseteq A\}$$

例: 如果 $A = \{1,2,3\}$, 那么

$$P(A) = \{\Phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

特别的, 空集 Φ 的幂集是: $P(\Phi) = \{\Phi\}$.

有这样一个集合,如果讨论范围内的所有集合都是它的子集,称该集合为**全集** (Universal Set). 记作 U .

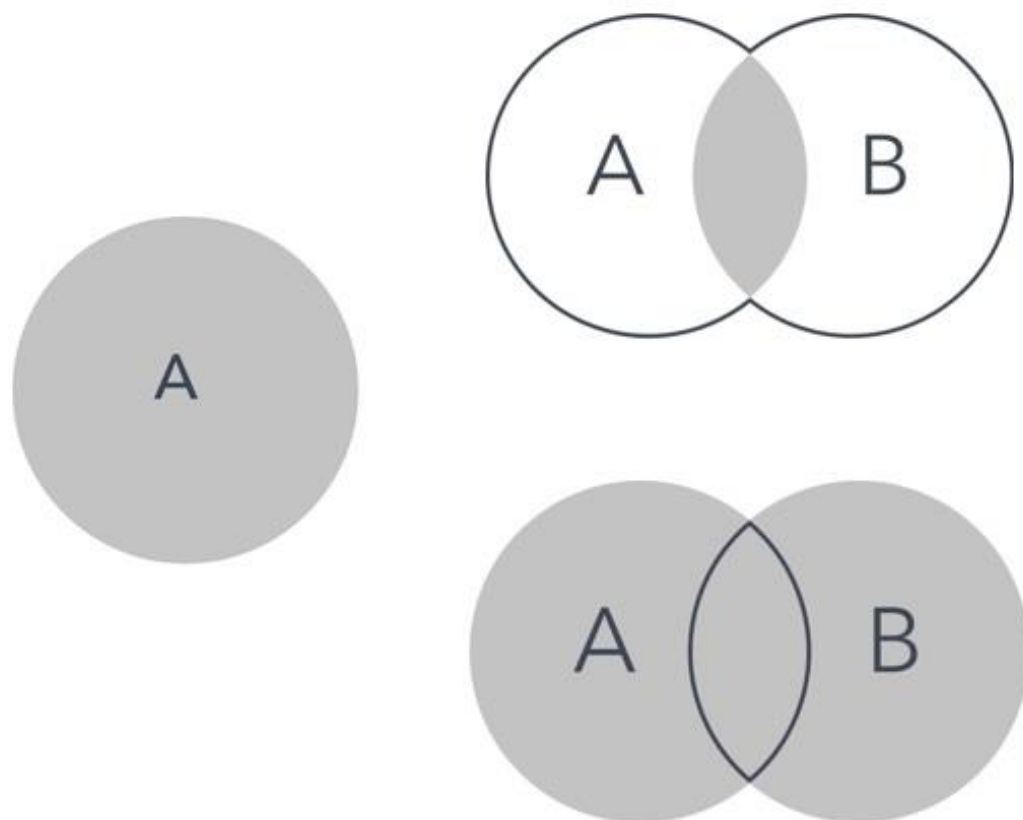
B 在 A 中的相对补集或差集是

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

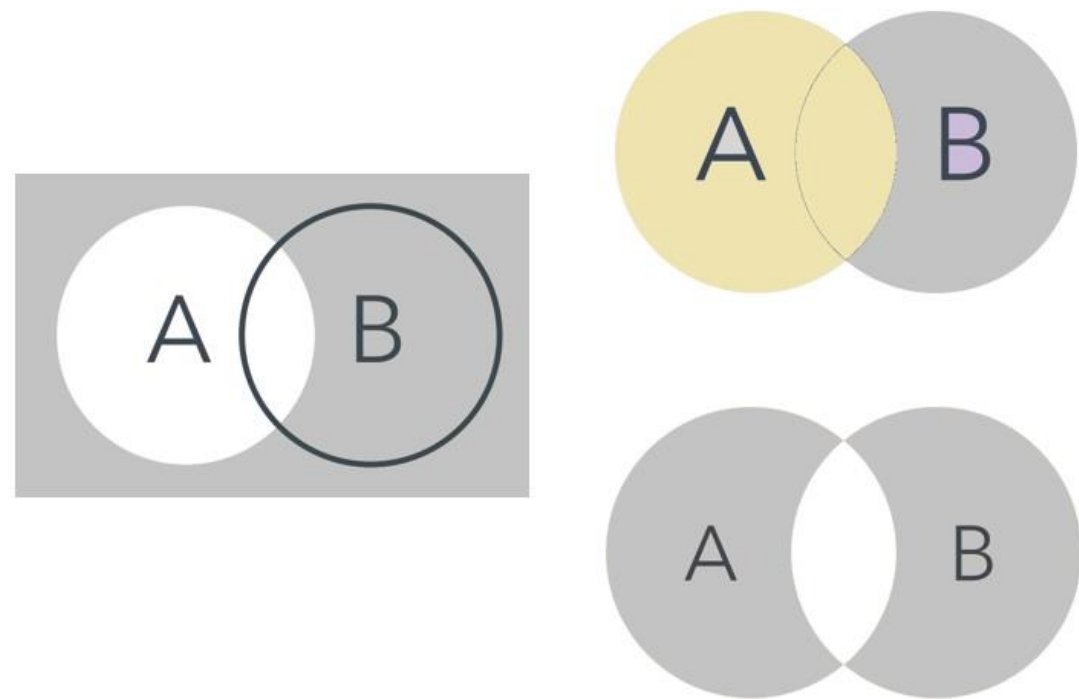
设 U 是全集, A 是 U 的子集, $U - A$ 称为集合 A 的绝对补集. 记作 $\sim A$ 或 A^c .

设 A, B 是任意给定的两个集合, A 和 B 的交集 $A \cap B$,并集 $A \cup B$,以及对称差集 $A \oplus B$ 分别定义如下:

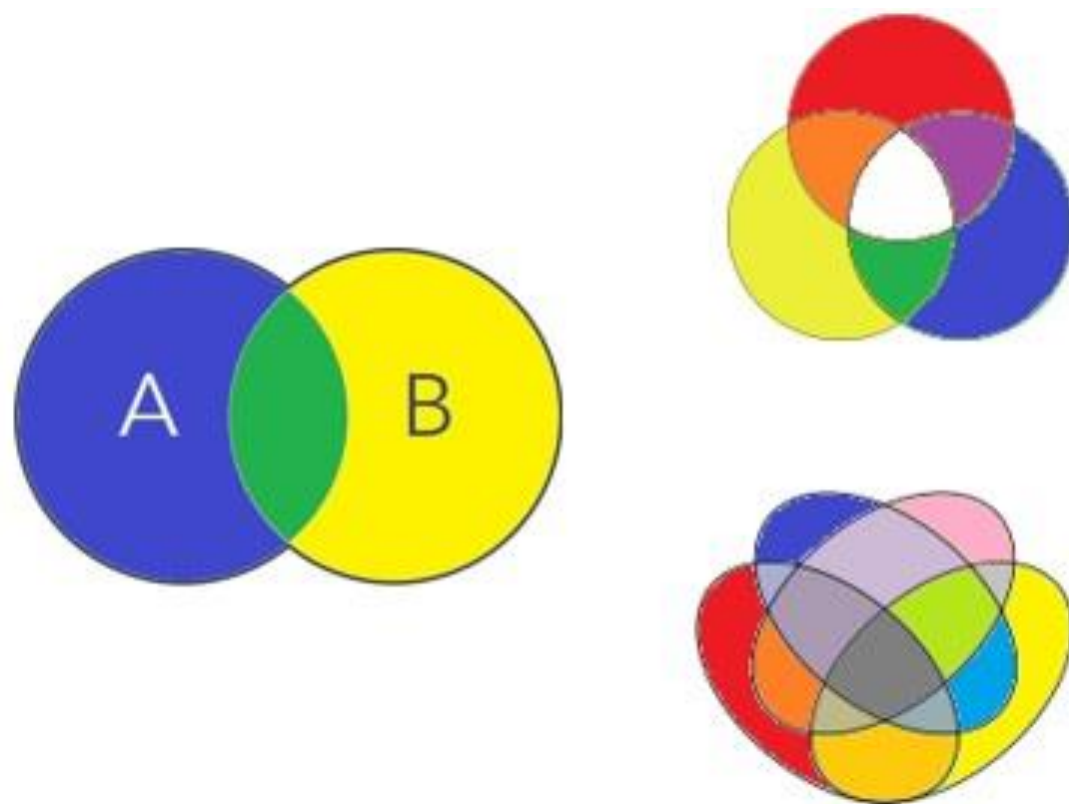
- $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
- $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$
- $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x | (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$



维恩图(Venn diagram): 集合、集合的并与交



绝对补集、相对补集和对称差集



2、3、4集合的维恩图

设 A, B 是任意的集合,运用下面的规则可以产生集合公式:

- 集合 A 是集合公式。
- 若 A 是集合公式,则 $\sim A$ 也是集合公式。
- 若 A, B 是集合公式,则 $(A \cup B), (A \cap B), (A - B), (A \oplus B)$ 也都是集合公式。
- 有限次地使用以上规则得到的公式都是集合公式。

例如: $(A \oplus B) \cap (B - C)$ 是集合公式。

设 A, B, C 是全集 U 的任意子集,
以下是一些基本集合定律:

幂等律(Idempotent Laws)

- $A \cup A = A, A \cap A = A$

交换律(Commutative Property)

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \oplus B = B \oplus A$

结合律(Associative Property)

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

分配律(Distributive Property)

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

同一律(Identity)

- $A \cup \Phi = A, A \cap U = A$
- $A - \Phi = A, A \oplus \Phi = A$

零律或支配律(Domination Laws)

- $A \cup U = U, A \cap \Phi = \Phi$

互补律(Complement)

- $A \cup \sim A = U$
- $A \cap \sim A = \Phi$
- $\sim U = \Phi$
- $\sim \Phi = U$

吸收律(Absorption Laws)

- $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cap (A \cup B) = A$

双重否定律(Double Complement)

- $\sim(\sim A) = A$

德·摩根律(De Morgan's Laws)

- $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$
- $\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$
- $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
- $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$